МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

# Обнинский институт атомной энергетики –

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)**

,

Одобрено УМС ИАТЭ НИЯУ МИФИ,

Протокол №2-8/2021 От 30.08.2021

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

|  |
| --- |
| **Функциональный анализ** |
| *название дисциплины* |
|  |
| для студентов направления подготовки |
|  |
| **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»** |
|  |
|  |
|  |
| профиля |
| **Прикладная информатика** |
|  |
|  |
|  |
| Форма обучения: очная |

**г. Обнинск 2021 г.**

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» по направлению подготовки **01.03.02 -«Прикладная математика и информатика»**

Программу составил:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Д. А. Камаев, заведующий лаб. Математических методов ФИАЦ ФГБУ «НПО «Тайфун», д.т.н.

Программа рассмотрена на заседании отделения интеллектуальных кибернетических систем (О) (протокол № 5/7 от «30» июля 2021 г.)

Руководитель образовательной программы

01.03.02 – «Прикладная математика и информатика»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ С.В. Ермаков

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2021 г.

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения ООП бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Коды компетенций | **Результаты освоения ООП**  **Содержание компетенций\*** | **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине\*\*** |
| ПК-2 | Способность понимать, применять и совершенствовать современный математический аппарат | **Знать:** основы математического анализа и теории множеств.  **Уметь:** решать задачи из классического математического анализа.  **Владеть:** основными понятиями и методами математического анализа и теории множеств. |
| ОПК-3 | Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности | **Знать:** основы дифференцирования, интегрирования функций, сходимость последовательностей величин.  **Уметь:** работать с числовыми матрицами, находить производные, считать интегралы.  **Владеть:** основами теории рядов, функций комплексной переменной. |

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина реализуется в рамках профессионального модуля с индексом Б.04.07

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин:

«Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дискретная математика».

Математический анализ: основные приемы дифференцирования и интегрирования элементарных функций;

Линейная алгебра: основные понятия и определения линейной алгебры, матричное исчисление.

Дискретная математика: Логические операции, Булевы функции, Полнота систем булевых функций, Размещения и перестановки, Сочетания и сочетания с повторениями, Алгоритмы на графах

Дисциплины, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее: «теория случайных процессов», «исследование операций», «Теория вероятностей и математическая статистика**».**

Дисциплина изучается на третьем курсе в 5 и 6 семестрах.

3. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 9 зачетных единиц (ЗЕ), 324 академических часов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вид работы** | **Форма обучения** (вносятся данные по реализуемым формам) | | | | | | | | |
| **Очная** | | | | **Заочная** | | | | |
| **Семестр** | | | | **Курс** | | | | |
| **№ 5** | | **№6** | **Всего** | **№ \_** | | **№ \_** | | **Всего** |
| **Количество часов на вид работы:** | | | | | | | | |
| **Контактная работа обучающихся с преподавателем** |  | | | |  | | | | |
| **Аудиторные занятия *(всего)*** | **64** | **64** | | **128** |  |  | |  | |
| В том числе: |  |  | |  |  |  | |  | |
| *лекции*  *(лекции в интерактивной форме)* | 32 | 32 | | 64 |  |  | |  | |
| *практические занятия*  *(практические занятия в интерактивной форме)* | 32 | 32 | | 64 |  |  | |  | |
| *лабораторные занятия* |  |  | |  |  |  | |  | |
| **Промежуточная аттестация** |  |  | |  |  |  | |  | |
| В том числе: |  |  | |  |  |  | |  | |
| *экзамен* | 36 | 54 | | 90 |  |  | |  | |
| **Самостоятельная работа обучающихся** |  |  | |  |  |  | |  | |
| **Самостоятельная работа обучающихся *(всего)*** | **80** | **26** | | **106** |  |  | |  | |
| В том числе: |  |  | |  |  |  | |  | |
| *проработка учебного (теоретического) материала* | 24 | 8 | | 32 |  |  | |  | |
| *выполнение домашних заданий* | 36 | 8 | | 32 |  |  | |  | |
| *подготовка ко всем видам контрольных испытаний текущего контроля успеваемости (в течение семестра)* | 20 | 10 | | 30 |  |  | |  | |
|  |  |  | |  |  |  | |  | |
| **Всего (часы):** | 180 | 144 | | 324 |  |  | |  | |
| **Всего (зачетные единицы):** | **4** | **3** | | **7** |  |  | |  | |

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование раздела /темы дисциплины | Виды учебной работы в часах (вносятся данные по реализуемым формам) | | | | | | | | | |
| Очная форма обучения | | | | | Заочная форма обучения | | | | |
| Лек | Пр | Лаб | Внеауд | СРС | Лек | Пр | Лаб | Внеауд | СРС |
| 1. | Название раздела (5 семестр) | **32** | **32** |  |  | 80 |  |  |  |  |  |
| 1.1 | Кольца, полукольца и алгебра множеств. Борелевские кольца и алгебры. Последовательности множеств. Функции множеств, аддитивность, счетная аддивность, непрерывность. | 6 | 6 |  |  | 15 |  |  |  |  |  |
| 1.2 | Абстрактная мера и ее свойства, продолжение меры Стилтьеса. Борелевские меры, полные меры. Продолжение меры по схеме Жордана. Продолжение счетно-аддитивной меры с кольца. Продолжение меры по схеме Лебега, свойства продолжения | 10 | 10 |  |  | 30 |  |  |  |  |  |
| 1.3 | Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса. Функции распределения счетно-аддитивной меры. Измеримые функции: определение и основные свойства, сходимость. | 16 | 16 |  |  | 35 |  |  |  |  |  |
| 2. | Название раздела (6 семестр) | **32** | **32** |  |  | **26** |  |  |  |  |  |
| 2.1 | Аксиомы метрики. Сходимость последовательности метрического пространства. Топология метрического пространства. Непрерывные функции | 4 | 4 |  |  | 2 |  |  |  |  |  |
| 2.2 | Примеры метрических пространств. Сепарабельные пространства. Полные пространства. Принцип сжимающих отображений. | 5 | 5 |  |  | 2 |  |  |  |  |  |
| 2.3 | 3. Линейные пространства. Линейные многообразия. Фактор пространства. Линейные нормированные пространства. Аксиомы нормы. | 8 | 8 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |
| 2.4 | Банаховы пространства. Топологические линейные пространства. Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства. | 5 | 5 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |
| 2.5 | Определение и примеры линейных операторов, их свойства. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Сходимость операторов. Обратный оператор | 5 | 5 |  |  | 5 |  |  |  |  |  |
| 2.6 | Линейные функционалы на линейных нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха и ее следствия. Общий вид линейных функционалов в конкретных пространствах. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. | 5 | 5 |  |  | 6 |  |  |  |  |  |
|  | **Всего:** | **64** | **64** |  |  | **106** |  |  |  |  |  |

*Прим.: Лек – лекции, Пр – практические занятия / семинары, Лаб – лабораторные занятия, Внеауд – внеаудиторная работа, СРО – самостоятельная работа обучающихся*

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам (темам)

Лекционный курс

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование раздела /темы дисциплины | Содержание |
| 1. | Алгебра множеств. Функции множеств. | |
| 1.1. | Алгебра множеств | Кольца, полукольца и алгебра множеств. Борелевские кольца и алгебры. Последовательности множеств |
| 1.2. | Функции множеств | Функции множеств, аддитивность, счетная аддивность, непрерывность. Отображения. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества Конечные и бесконечные множества. Счетные множества и несчетные множества |
| 2. | Абстрактная мера и ее свойства | |
| 2.1. | Абстрактная мера и ее свойства. Продолжение меры по схеме Лебега, свойства продолжения | Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры. Однозначность продолжения меры. |
| 2.2. | Продолжение меры Стилтьеса. Продолжение меры по схеме Жордана. | Продолжение меры по Жордану. Борелевские меры, полные меры. |
| 3. | Измеримые функции. Интеграл Лебега. | |
| 3.1. | Измеримые функции. | Определение и основные свойства измеримых функций. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. |
| 3.2. | Интеграл Лебега. | Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Ри мана. |
| 4. | Метрические и топологические пространства | |
| 4.1. | Понятие метрического пространства | Определение и основные примеры. Непрерывные отображения метрических пространств. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки. Замыкание. Сходимость. Плотные подмножества. Открытые и замкнутые множества. Открытые и замкнутые множества на прямой. |
| 4.2. | Полные метрические пространства. | Определение и примеры полных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений и его применения. Принцип сжимающих отображений. Простейшие применения принципа сжимающих отображений. |
| 5. | Нормированные и топологические линейные пространства | |
| 5.1. | Линейные пространства. | Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость. Подпространства. Фактор-пространства. Линейные функционалы, геометрический смысл линейного функционала. |
| 5.2. | Нормированные пространства. | Определение и примеры нормированных пространств. Подпространства нормированного пространства. Фактор-пространства нормированного пространства. |
| 5.3. | Евклидовы пространства. | Определение евклидовых пространств. Примеры. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса—Фишера. Гильбертово пространство. |
| 5.4. | Топологические линейные пространства. | Определение и примеры. Локальная выпуклость. |
| 6. | Линейные функционалы н линейные операторы | |  |
| 6.1. | Непрерывные линейные функционалы. | Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах. Линейные функционалы на нормированных пространствах. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве. |
| 6.2. | Линейные операторы | Определение и примеры линейных операторов. Непрерывность и ограниченность. Сумма и произведение операторов. Обратный оператор, обратимость. Сопряженные операторы. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы. Спектр оператора. Резольвента. |

Практические/семинарские занятия

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование раздела /темы дисциплины | Содержание |
| 1. | Название раздела 1 | |
| 1.1. | Множества, отображения. | Операции над множествами. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности. Конечные и бесконечные множества. Счетные множества. Эквивалентность множеств. Несчетность множества действительных чисел. Понятие мощности множества. |
| 1.2. | Системы множеств. | Кольцо множеств. Полукольцо множеств. Кольцо, порожденное полукольцом. σ-алгебры. Системы множеств и отображения. |
| 1.3. | Общее понятие меры. | Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ-аддитивность. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо. σ-аддитивность. |
| 1.4. | Измеримые функции. | Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере. |
| 1.5. | Интеграл Лебега. | Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций. Интеграл Лебега на множестве конечной меры. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Ри мана. |
| 2. | Название раздела 2 | |
| 2.1. | Метрические пространства. | Открытые и замкнутые множества. Предельные точки. Замыкание. Сходимость. Плотные подмножества. Простейшие применения принципа сжимающих отображений. |
| 2.2. | Линейные пространства. | Примеры линейных пространств. Линейная зависимость. Подпространства. Фактор-пространства. Линейные функционалы |
| 2.3. | Нормированные пространства. | Примеры нормированных пространств. Евклидовы пространства. Гильбертово пространство. |
| 2.4. | Линейные функционалы | Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах. Линейные функционалы на нормированных пространствах. Сопряженное пространство. Примеры сопряженных пространств. |
| 2.5. | Линейные операторы. | Сумма и произведение операторов. Обратный оператор, обратимость. Сопряженные операторы. Непрерывность и ограниченность, норма оператора. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы. Сопряженный оператор в пространствах Гильберта. |

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Гуревич А. П. Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич,
2. В. В. Корнев, А. П. Хромов. – СПб.: Лань, 2012. Точка доступа:
3. <http://e.lanbook.com/view/book/3175/>.
4. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник,
5. Соболев В. И. – СПб.: Лань, 2009. Точка доступа: http://e.lanbook.com/view/book/245/.
6. Трель И.Л. Функциональные пространства: теория, задачи, решения: учебное пособие / И. Л. Трель [и др.] – Томск: Изд-во Томского гос. пед. ун-та, 2008.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. В 2 т.: учебное пособие для бакалавров

[ВПО]. Т. 1 / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - Москва: Академия, 2012. - 240 с.

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Контролируемые разделы (темы) дисциплины (результаты по разделам)** | **Код контролируемой компетенции (или её части) / и ее формулировка** | **Наименование оценочного средства** |
| **Текущий контроль, 4 семестр** | | | |
| 1. | Алгебра множеств. Функции множеств | ОПК-3, ПК-2 | Контрольная работа № 1 |
| 2. | Измеримые функции. Интеграл Лебега | ОПК-3, ПК-2 | Контрольная работа № 2 |
| **Промежуточный контроль, 4 семестр** | | | |
|  | экзамен | ОПК-3, ПК-2 | Экзаменационный билет |
| Всего: | | | |
| **Текущий контроль, 5 семестр** | | | |
| 3. | Метрические пространства. Линейные пространства. | ОПК-3, ПК-2 | Контрольная работа № 4 |
| 4 | Нормированные пространства. Линейные функционалы. Линейные операторы. | ОПК-3, ПК-2 | Контрольная работа № 5 |
| **Промежуточный контроль, 5 семестр** | | | |
|  | экзамен | ОПК-3, ПК-2 | Экзаменационный билет |
| Всего: | | | |

6.2. ***Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы***

*6.2.1. Экзамен*

**а) Вопросы к экзамену**

*5 семестр*

1. Элементы теории множеств. Понятие множества. Операции над множествами.
2. Отображения. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества Конечные и бесконечные множества. Счетные множества и несчетные множества
3. Упорядоченные множества. Частично упорядоченные множества. Порядковые типы. Вполне упорядоченные множества.
4. Аксиома выбора. Теорема Цермело.
5. Системы множеств. Кольцо множеств. Полукольцо множеств. Сигма-алгебры. Системы множеств и отображения.
6. Мера плоских множеств. Мера элементарных множеств. Лебегова мера плоских множеств.
7. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и сигма-аддитивность. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо. σ-аддитивность.
8. Лебегово продолжение меры. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры. Продолжение меры по Жордану. Однозначность продолжения меры.
9. Измеримые функции. Определение и основные свойства измеримых функций. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере
10. Интеграл Лебега. Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
11. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
12. Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини. Произведения систем множеств. Произведения мер. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега.

*6 семестр*

1. Определение и примеры полных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. По­полнение пространства.
2. Принцип сжимающих отображений и его применения.
3. Топологические пространства. Определение и примеры топологических пространств. Сравнение топологий. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности. Сходящиеся последовательности в Т.
4. Компактность в метрических пространствах. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах. Теорема Арцела.
5. Линейные пространства. Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость. Подпространства. Фактор-пространства. Линейные функционалы, геометрический смысл линейного функционала.
6. Нормированные пространства. Определение и примеры нормированных пространств. Подпространства нормированного пространства. Фактор-пространства нормированного пространства
7. Евклидовы пространства. Определение евклидовых пространств. Примеры. Существование ортогональных базисов, ортогонализация.
8. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса—Фишера. Гильбертово пространство.
9. Линейные операторы в Банаховых пространствах. Теорема Банаха- Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе.
10. Линейные функционалы. Пространства линейных операторов. Примеры. Общий вид линейных функционалов в некоторых пространствах. Теорема Рисса об общем виде функционалов в *Н*.
11. Пространства Банаха с базисом. Сопряженные пространства. Слабая сходимость. Сопряженные операторы. Теорема Хана-Банаха. Примеры.
12. Линейные операторы. Определение и примеры линейных операторов. Непрерывность и ограниченность. Сумма и произведение операторов. Обратный оператор, обратимость. Сопряженные операторы. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы. Спектр оператора. Резольвента.

**б) критерии оценивания компетенций (результатов) и описание шкалы оценивания**

По функциональному анализу предусмотрена бальная система оценки. Максимальная

сумма баллов, набираемая студентом за экзамен – 40 баллов. Для того чтобы набрать балы за экзамен, студенту необходимо ответить на экзамене на вопросы экзаменационного билета. Экзаменационный билет по функциональному анализу включает в себя 2 теоретических вопроса. Дополнительные вопросы задаются как для уточнения знаний студента по вопросам билета, так и для выяснения общих представлений студента по всему курсу функционального анализа.

Студенту, при сдаче теоретического материала, необходимо показать свою способность

демонстрации общенаучных базовых знаний функционального анализа, понимание основных фактов, концепций, связанных с функциональным анализом (ПК 1). Студенту выставляется 31-40 баллов, если тот дал полные, исчерпывающие ответы на основные и дополнительные вопросы и может уверенно выполнять задания, предусмотренные программой.

Студенту выставляется 21-30 баллов, если он ответил на оба вопроса экзаменационного

билета, но не понял некоторые тонкости доказательств или формулировок некоторых утверждений, лемм, теорем, но показавший систематический характер знаний по дисциплине, способность к самостоятельной работе.

Студенту выставляется 11-20 баллов, если он ответил на один из вопросов экзаменационного билета, показал, что обладает знаниями основного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы.

Студенту выставляется 0-10 баллов, если он не ответил ни на один из вопросов экзаменационного билета, имеет значительные пробелы в знаниях принципиального характера.

Национальный исследовательский ядерный университет ”МИФИ”

ОБНИНСКИЙ ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

# Кафедра прикладной математики

**Экзаменационный билет** *N o* **1**

по курсу **“Функциональный анализ”** для 4 семестра

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# Сравнение интегралов Лебега и Римана.

2. Сходимости по мере и почти всюду. Теорема Егорова.

# . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

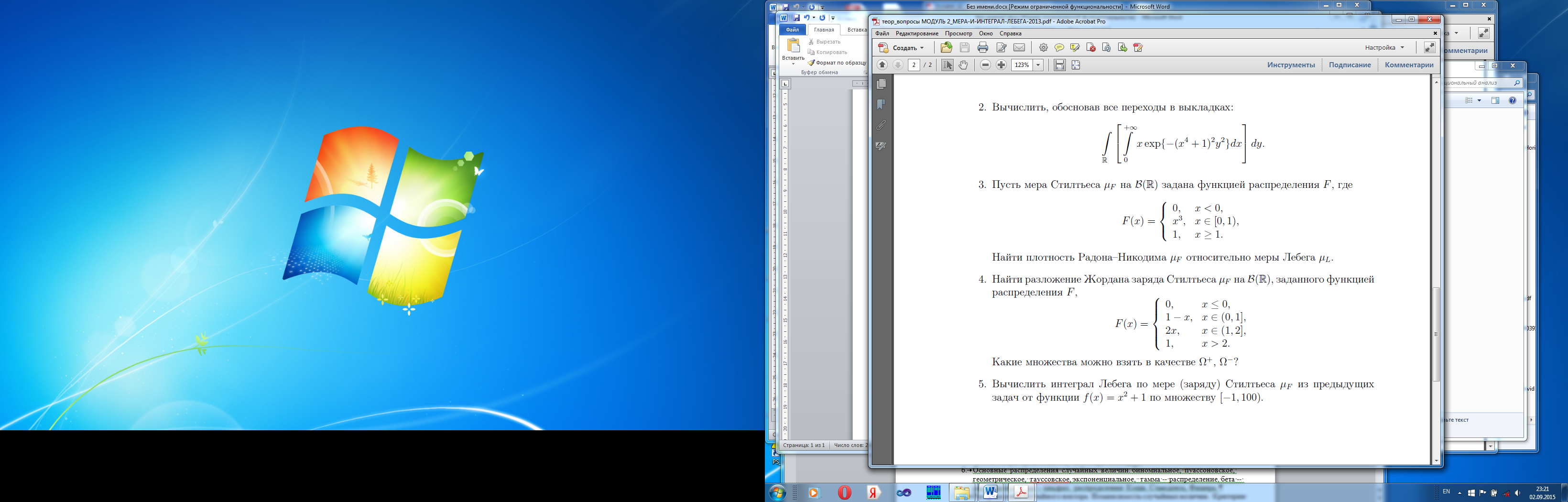
Зав. кафедрой . . . . . . . . . . . . . . . . . .

май 2021 г.

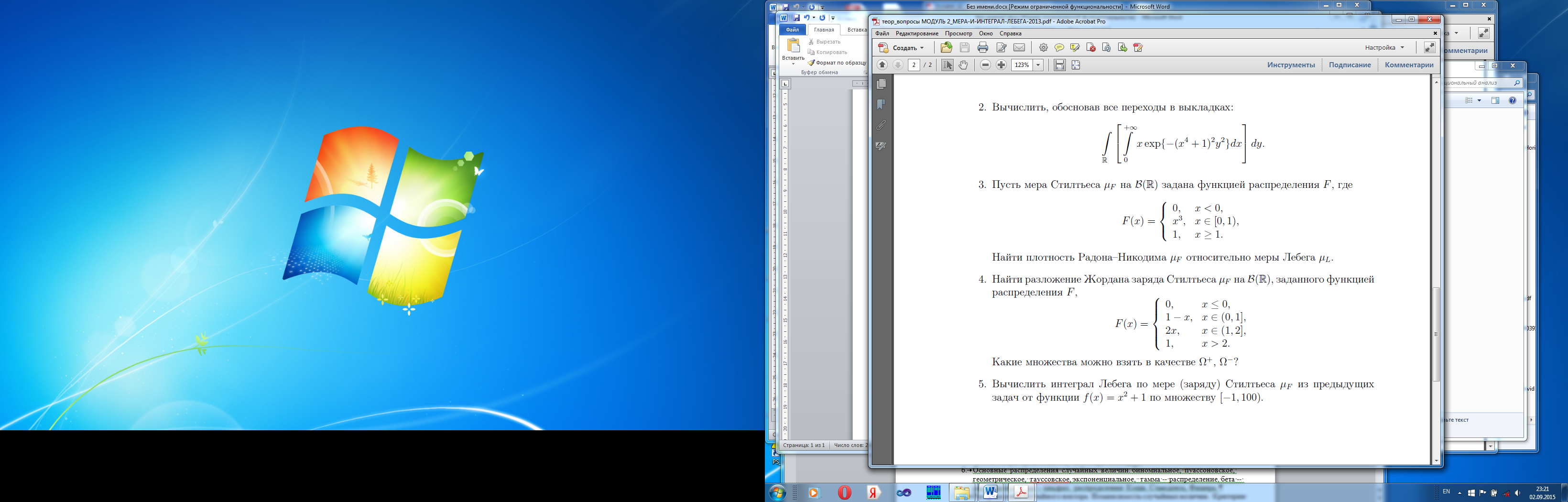
***6.2.2. Контрольная работа***

а) типовой вариант контрольной работы

1. Вычислить, обосновав все переходы в выкладках:

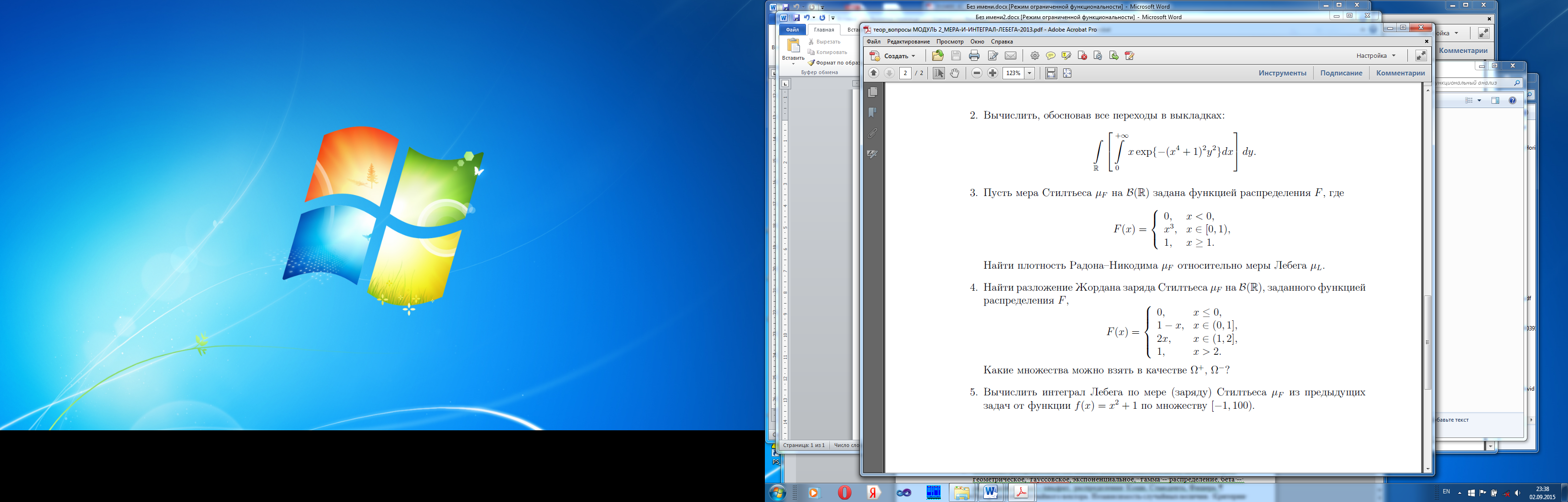


1. Пусть мера Стилтьеса *µF* на *B*(R) задана функцией распределения *F* , где



Найти плотность Радона–Никодима *µF* относительно меры Лебега *µL*.

1. Найти разложение Жордана заряда Стилтьеса *µF* на *B*(R), заданного функцией распределения *F* ,



Вопросы по теории

1. Сформулировать и доказать теорему Лебега о мажорированной сходимости.
2. Сформулировать и доказать теорему Леви о монотонной сходимости.
3. Сформулировать и доказать теорему Фату.
4. Определить пространство *L*1(Ω*, µ*), доказать его полноту.
5. Определить сходимость в среднем. Описать связь сходимости в среднем со сходимостью почти всюду и сходимостью по мере.
6. Определить операцию произведения мер, доказать счётную аддитивность произведения счётно-аддитивных мер.
7. Сформулировать и доказать теорему о связи меры множества с интегралом по мерам сечений этого множества.
8. Сформулировать и доказать теорему Фубини.
9. Сформулировать и доказать теорему Лебега о связи интеграла с производной.
10. Определить функции ограниченной вариации, абсолютно непрерывные функции, перечислить их свойства.
11. Сформулировать и доказать формулу Ньютона–Лейбница и формулу интегрирования по частям для интеграла Лебега.

Задачи

Является ли данный оператор линейным, непрерывным? Если возможно, вычислите его норму.

а)

1

*A* : *C*[5, 1] *R Ax*(*t*) *x*(*s*)*ds* 4*x*(4) ;

3

б) *A* : *L*1 (0,1) *L*1 (0,1) *Ax*(*t*) 5*t* 4*x*(*s* ) cos *t ds* ;

в) *A* : *l*2 *l*2 *Ax* (*x*2 , *x*4 , *x*6 , *x*8 ,...) .

1. Найти сопряженный оператор, проверить является ли он самосопряженным, если да, то будет ли он неотрицательным

а) *A* : *l*2 *l*2 *Ax* (*x*1 *x*2 ,0, *x*3 *x*4 ,0,...) ;

1 1

б) *A* : *L*2 (0,1) *L*2 (0,1) *Ax*(*t*) *x*(*s*)*ds* 5*x*(*t* ) *t s x*(*s*)*ds* .

4. Рассмотрим оператор *A*:*C*[-2, 4] →*C*[-2, 4], *Ax*(*t*)= *x*(*t*) − *tx*(0) + 2*x*(1) . Является ли

*A* непрерывно обратимым? Если да, то найти *A-1*

t 0

**б) критерии оценивания компетенций (результатов) и описание шкалы оценивания**

По функциональному анализу предусмотрена бальная система оценки. Максимальная

сумма баллов, набираемая студентом за контрольную работу – 30 баллов.

Студенту выставляется за контрольную работу 27-30 баллов, если он правильно решил 90-100% заданий и далее подобным образом.

6.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Рейтинговая оценка знаний является интегральным показателем качества теоретических и практических знаний и навыков студентов по дисциплине и складывается из оценок, полученных в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль в семестре проводится с целью обеспечения своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы студентов.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины.

Текущий контроль осуществляется два раза в семестр: контрольная точка № 1 (КТ № 1) и контрольная точка № 2 (КТ № 2).

Результаты текущего контроля и промежуточной аттестации подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид контроля** | **Этап рейтинговой системы**  **Оценочное средство** | **Балл** | |
| Минимум | Максимум |
| **5 семестр** | | | |
| **Текущий** | **Контрольная точка № 1** | 20 | 60 |
| Контрольная работа № 1 | 10 | 30 |
| **Контрольная точка № 2** | 15 | 30 |
| Контрольная работа № 2 | 15 | 30 |
| **Промежуточный** | **Экзамен** | 25 | 40 |
|  | Билеты | 25 | 40 |
|  | … |  |  |
| **ИТОГО по дисциплине за 5 семестр** | | 60 | 100 |
|  | |  |  |
| **6 семестр** | | | |
| **Текущий** | **Контрольная точка № 1** | 20 | 60 |
| Контрольная работа № 3 | 10 | 30 |
| **Контрольная точка № 2** | 15 | 30 |
| Контрольная работа №4 | 15 | 30 |
| **Промежуточный** | **Экзамен** | 25 | 40 |
|  | Билеты | 25 | 40 |
|  | … |  |  |
| **ИТОГО по дисциплине за 6 семестр** | | 60 | 100 |

**Штрафы:** за несвоевременную сдачу контрольной работы максимальная оценка может быть снижена на 20%.

При изучении теоретических и практических вопросов студентам выставляются баллы за выполнение следующих видов работ:

1) Выполнение домашнего задания

2) Решение задач у доски

3) Решение контрольных работ

4) Ответы на опросы по изучаемому материалу

5) Ответы на тестовые задания

6) Активность при изучении разделов курса.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная учебная литература:

1. Гуревич, А. П. Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич,

В. В. Корнев, А. П. Хромов. – СПб.: Лань, 2012. Точка доступа:

http://e.lanbook.com/view/book/3175/.

1. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник,

В. И. Соболев. – СПб.: Лань, 2009. Точка доступа: http://e.lanbook.com/view/book/245/.

1. Трель, И.Л. Функциональные пространства: теория, задачи, решения: учебное пособие /И. Л. Трель [и др.] – Томск: Изд-во Томского гос. пед. ун-та, 2008.
2. Треногин, В. А. Функциональный анализ. В 2 т. [Текст] : учебное пособие для бакалавров [ВПО]. Т. 1 / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - Москва: Академия, 2012. - 240 с.

б) дополнительная учебная литература:

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник / А.Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - М.: Наука; ФИЗМАТЛИТ, 1981.
2. Данфорд И., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
3. Власов В.В., Коновалов С.П., Курочкин С.В. Задачи по функциональному анализу. − М.: МФТИ, 2000
4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д*. Теоремы и задачи функционального анализа*. \_ М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979
5. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник /А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. - Минск: Изд-во БГУ, 2006.
6. Данилин, А.Р. Функциональный анализ: учеб. пособие / А. Р. Данилин. - Екатеринбург:Изд-во Уральского ун-та, 2007.
7. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. - М.: URSS, 2007.
8. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. - М.: Наука; ФИЗМАТЛИТ, 1977.
9. Люлько, Н.А. Функциональный анализ: учеб. пособие / Н. А. Люлько, О. Д. Максимова, В. Ю. Ляпидевский. - Новосибирск: Изд-во НовГУ, 2005.
10. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. - СПб.: Лань, 2005.
11. Свешников, А.Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов. - М.: Научный мир, 2008.
12. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - М.: Наука, 1984.
13. Треногин, В.А. Функциональный анализ: учебник / В.А. Треногин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

**8. Перечень ресурсов информационного-телекоммуникационной сети «Интернет»,**

**необходимых для освоения дисциплины**

www.mathnet.ru – общероссийский математический портал;

http://e.lanbook.com/books/?p\_f\_1\_temp\_id=18&p\_f\_1\_65=917&p\_f\_1\_63=&p\_f\_1\_67= - электронно-библиотечная система, издательство «Лань»;

www.elibrary.ru – научная электронная библиотека;

www.lib.mexmat.ru – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;

http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/kompyutery\_i\_matematika/ - электронная

библиотека по математике;

http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web\_Links&file=index&l\_op=viewlink&cid=

2720 – федеральный портал российского профессионального образования: Математика и естественно-научное образование

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень

требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

**9.1. Советы по планированию и организации времени, необходимого для изучения дисциплины**.

Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины:

Изучение конспекта лекции дисциплины «Функциональный анализ» в тот же день, после

лекции – 15-20 минут.

Изучение конспекта лекции за день перед следующей лекцией – 15-20 минут.

Изучение теоретического материала по учебнику и конспекту – 1 час в неделю.

Подготовка к практическому занятию – 1 час.

Всего в неделю – 2 часа 40 минут.

**9.2. Описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»)**.

При изучении дисциплины полезно самостоятельно изучать материал, который еще

не прочитан на лекции, не применялся на практическом занятии. Тогда лекция будет понятнее. Однако легче при изучении курса следовать изложению материала на лекции. Для понимания материала и качественного его усвоения рекомендуется такая последовательность действий:

1. После прослушивания лекции и окончания учебных занятий, при подготовке к занятиям

следующего дня, нужно сначала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня (10-15 минут).

2. При подготовке к лекции следующего дня, нужно просмотреть текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть тема следующей лекции (10-15 минут).

3. В течение недели выбрать время (1-час) для работы с литературой по функциональному

анализу в библиотеке.

2. При подготовке к практическим занятиям следующего дня, необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме домашнего задания. При выполнении упражнения или задачи нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Если это не дало результатов, и Вы сделали задачу «по образцу» аудиторной задачи, или из методического пособия, нужно после решения такой задачи обдумать ход решения и опробовать решить аналогичную задачу самостоятельно.

**9.3. Рекомендации по использованию материалов учебно-методического комплекса**.

Рекомендуется использовать методические указания по курсу функционального анализа, текст лекций преподавателя (если он имеется). Рекомендуется использовать электронные учебно-методические пособия (если он имеется) по решению задач по функциональному анализу.

**9.4. Рекомендации по работе с литературой**.

Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта, изучаются и книги по методам функционального анализа. Литературу по курсу функционального анализа рекомендуется изучать в библиотеке. Полезно использовать несколько учебников по функциональному анализу. Однако легче освоить курс придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться состояния понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько простых упражнений на данную тему. Кроме того, очень полез-

но мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): О чем этот параграф? Какие новые понятия введены, каков их смысл? Сколько теорем в этом параграфе и каков их смысл «своими словами», будет ли верна теорема, если опустить некоторые условия в ее формулировке? Доказательства теорем следует не заучивать, а «понять». С этой целью рекомендуется записать идею доказательства, составить план доказательства, попробовать доказать теорему самостоятельно, может быть другим способом, сравнить доказательство теоремы в конспекте и в учебнике. При изучении теоретического материала всегда нужнорисовать схемы или графики.

**9.5. Советы по подготовке к экзамену**.

Дополнительно к изучению конспектов лекции необходимо пользоваться учебником по функциональному анализу. Кроме «заучивания» материала экзамена, очень важно добиться состояния понимания изучаемых тем дисциплины.

С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько упражнений на данную тему.

Доказательства теорем следует не заучивать, а «понять». С этой целью рекомендуется записать идею доказательства, составить план доказательства, попробовать доказать теорему самостоятельно.

**9.6. Указания по организации работы с контрольно-измерительными материалами, по выполнению домашних заданий**.

При выполнении домашних заданий необходимо сначала прочитать основные понятия и теоремы по теме задания. При выполнении упражнения или задачи нужно сначала понять, что требуется в задаче, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи. Если это не дало результатов, и Вы сделали задачу «по образцу» аудиторной задачи, или из методического пособия, нужно после решения такой задачи обдумать ход решения и опробовать решить аналогичную задачу самостоятельно.

**10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем**

Skype, для проведения дистанционного обучения и консультаций.

1. **Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

При освоении дисциплины для проведения лекционных занятий необходимы учебные аудитории, возможно с использованием мультимедийных технологий, для выполнения практических работ необходимы учебные аудитории.